

Ejercicio 5

La ecuación

$$(x+1) \frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$$

no es separable por lo que tenemos que usar otro método. El método que usaremos es el de factor integrante.

Método

1. Pasar a la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$

Dividimos ambos lados entre $(x+1)$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(x+2)}{(x+1)}y = \frac{2xe^{-x}}{(x+1)}$$

Esta es la forma deseada

2. Identificar $P(x)$

$$P(x) = \frac{(x+2)}{(x+1)}$$

3. Identificar el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int \frac{(x+2)}{(x+1)}dx}$$

Separamos el numerador como $(x+1) + 1$ para

$$\begin{aligned} e^{\int \frac{(x+2)}{(x+1)}dx} &= e^{\int \frac{(x+1)}{(x+1)}dx + \int \frac{1}{(x+1)}dx} = e^{\int 1dx + \int \frac{1}{(x+1)}dx} \\ e^{\int 1dx + \int \frac{1}{(x+1)}dx} &= e^x e^{\int \frac{1}{(x+1)}dx} = e^x e^{\ln|x+1|} \\ &= e^x(x+1) \end{aligned}$$

4. Multiplicar la ecuación por el factor integrante.

$$e^x(x+1) \frac{dy}{dx} + e^x(x+1) \frac{(x+2)}{(x+1)}y = e^x(x+1) \frac{2xe^{-x}}{(x+1)}$$

Simplificamos

$$\begin{aligned} e^x(x+1) \frac{dy}{dx} + e^x(x+2)y &= e^x(2xe^{-x}) \\ e^x(x+1) \frac{dy}{dx} + e^x(x+2)y &= 2x \end{aligned}$$

Para simplificar esta ecuación usamos la regla de producto

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$$

Reemplazamos $u = e^x(x+1)$ y $v = y$ entonces

$$\frac{d}{dx}(e^x(x+1)y) = e^x(x+1) \frac{dy}{dx} + (e^x \cdot 1 + e^x(x+1)) \cdot y$$

Simplificamos

$$\frac{d}{dx}(e^x(x+1)y) = e^x(x+1) \frac{dy}{dx} + (e^x(x+1+1)) \cdot y$$

$$\frac{d}{dx}(e^x(x+1)y) = e^x(x+1) \frac{dy}{dx} + e^x(x+2)y$$

Y esto significa que podemos simplificar la ecuación a

$$\frac{d}{dx}(e^x(x+1)y) = 2x$$

5. Integrar

$$\int \frac{d}{dx}(e^x(x+1)y) dx = \int 2x dx$$

En el lado izquierdo la integral se cancela con la derivada por lo que

$$e^x(x+1)y = \int 2x dx$$

$$e^x(x+1)y = \frac{2}{2}x^2 + c$$

$$e^x(x+1)y = x^2 + c$$

Esta es la respuesta implícita, para obtener la respuesta explícita tenemos que dividir ambos lados entre $e^x(x+1)$.

$$y = \frac{x^2 + c}{e^x(x+1)}$$